

Лекция №10.

Сетевое планирование и управление. Многошаговая оптимизация

Инструментальные методы
цифровой экономики 2019-2020

Мероприятие

Серия семинаров и осенняя школа «Современные методы и модели теории индивидуального и коллективного выбора и принятия решений с применением к сетевому анализу данных, задачам агрегирования, индексам влияния»

- 12 – 15 ноября 2019;
- С 10:00 до 18:00;
- Ауд. Т510.
- <https://www.hse.ru/DeCAn/announcements/314950480.html>

План лекции

- Сетевое планирование и управление, критический путь в сетевом графике;
- Многошаговая оптимизация и задачи оптимального управления;
 - Задача о рюкзаке;
 - Задача о замене оборудования;
- Принцип построения динамического программирования. Принцип оптимальности.

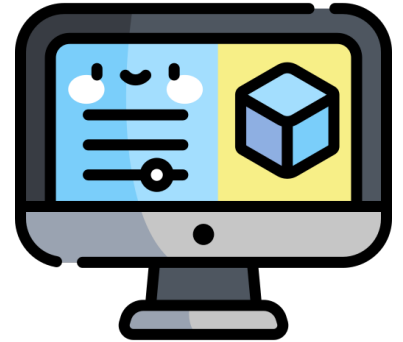
Сетевое планирование и управление

Рассмотрим задачу сетевого планирования и управления. Она используется при проведении комплекса разработок, включающих в себя выполнение взаимосвязанных работ, например:

- изменение организационной структуры;
- строительство, разработка новых технических систем и изделий;
- проведение ремонта и реконструкции предприятий и агрегатов;
- и т.д.

Пример списка работ

1. Начало реализации проекта;
2. Постановка задачи;
3. Разработка интерфейса;
4. Разработка модулей обработки данных;
5. Разработка структуры базы данных;
6. Заполнение базы данных;
7. Отладка программного комплекса;
8. Тестирование и исправление ошибок;
9. Составление программной документации;
10. Завершение проекта.



Сетевое планирование и управление

- Основные проблемы, которые необходимо решить:

- Формирование календарного плана реализации комплекса работ;



- Принятие эффективных решений в процессе выполнения этого плана.

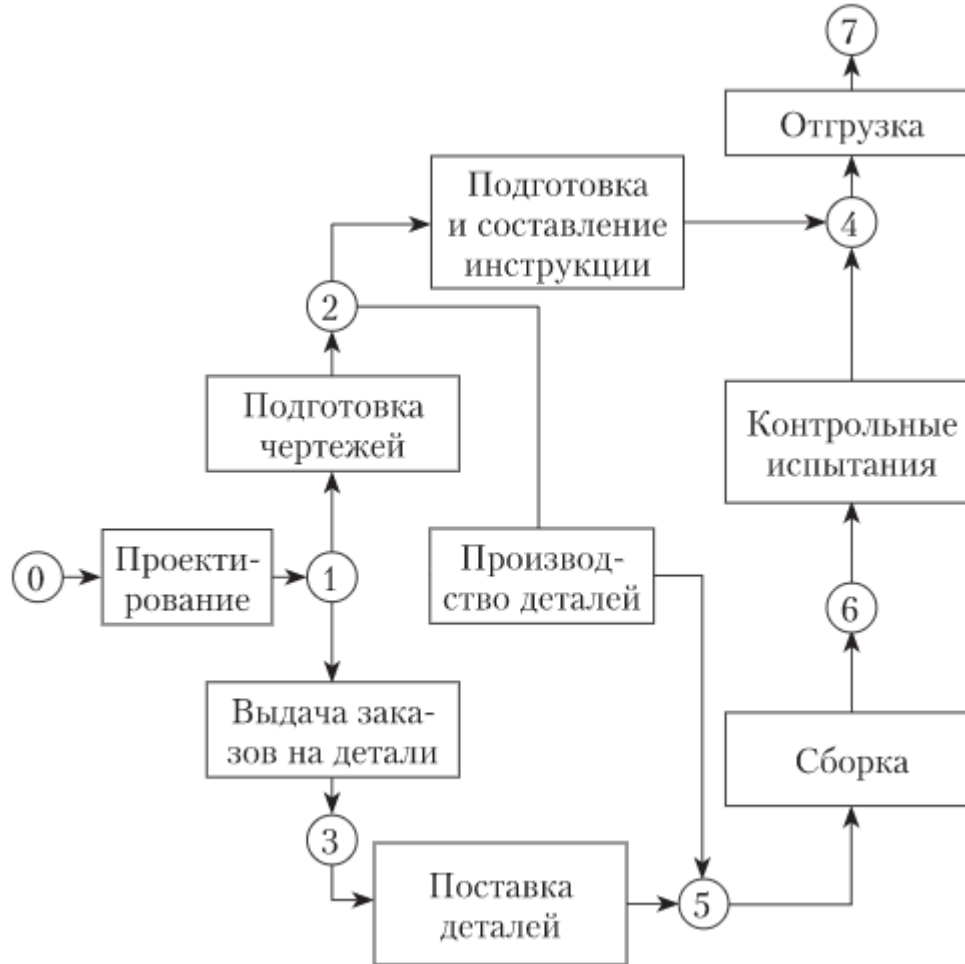


Сетевое планирование и управление

Выполняемый комплекс работ может быть представлен в виде ориентированного графа, где

- *Вершины* – события, представляющие собой завершение одних работ и начало других работ;
- *Дуги* – выполняемые работы;
- Последовательность дуг – порядок, в котором выполняются работы;
- Работы, соответствующие дугам, выходящим из любой вершины, могут быть начаты только после завершения всех работ, соответствующих дугам, входящим в эту вершину.

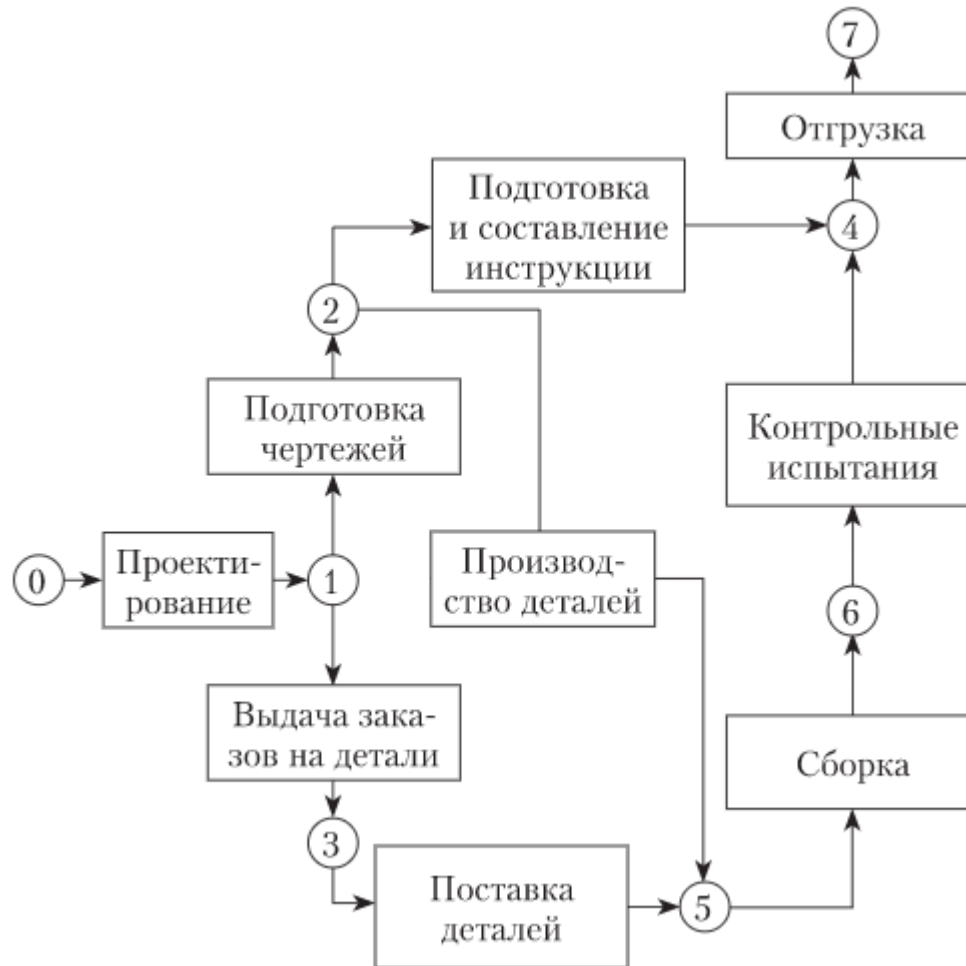
Пример сетевого графика



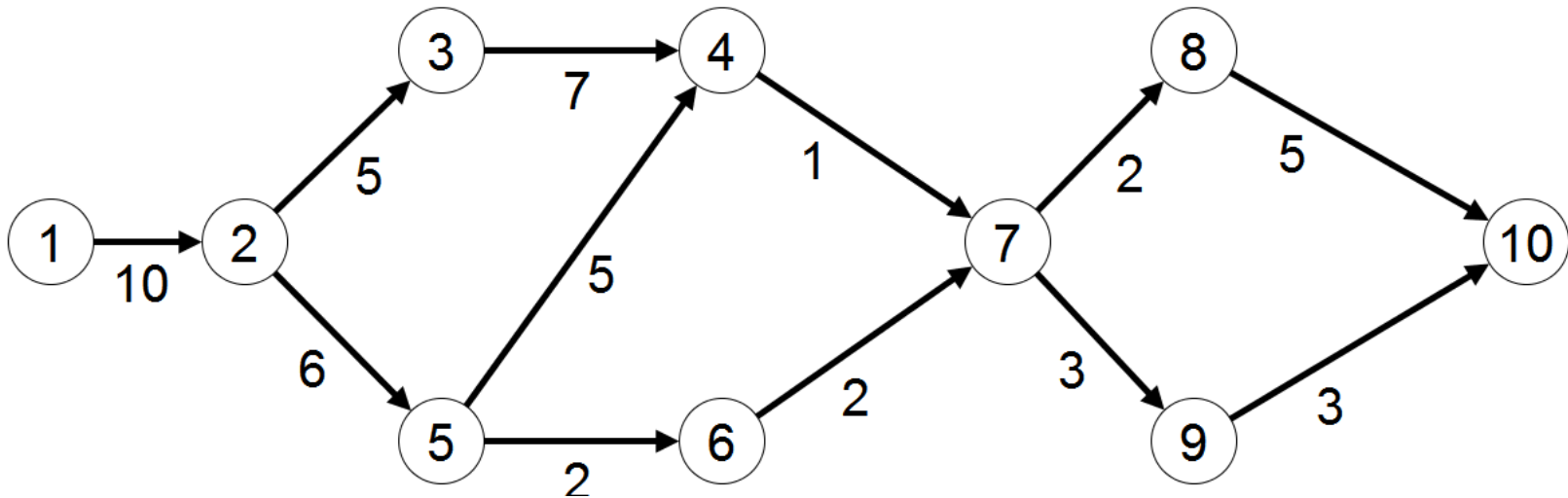
Сетевое планирование и управление

- Ограничения для ориентированного графа:
 - Существует только одна вершина, в которую не входит ни одна дуга (начальное состояние – начало рассматриваемого комплекса работ)
 - Существует только одна вершина, из которой не выходит ни одна дуга (конечное состояние – окончание рассматриваемого комплекса работ)
 - Граф не содержит циклов.
 - Каждой работе соответствует одна и только одна дуга.
 - Ни одна работа не может быть начата до того, как закончатся все непосредственно предшествующие ей работы.
 - Начало и конец проекта обозначены событиями с нулевой продолжительностью;
 - Сетевой график должен быть упорядочен: работы должны располагаться так, чтобы для любой работы предшествующая работа должна быть расположена левее и иметь меньший номер.

Пример сетевого графика

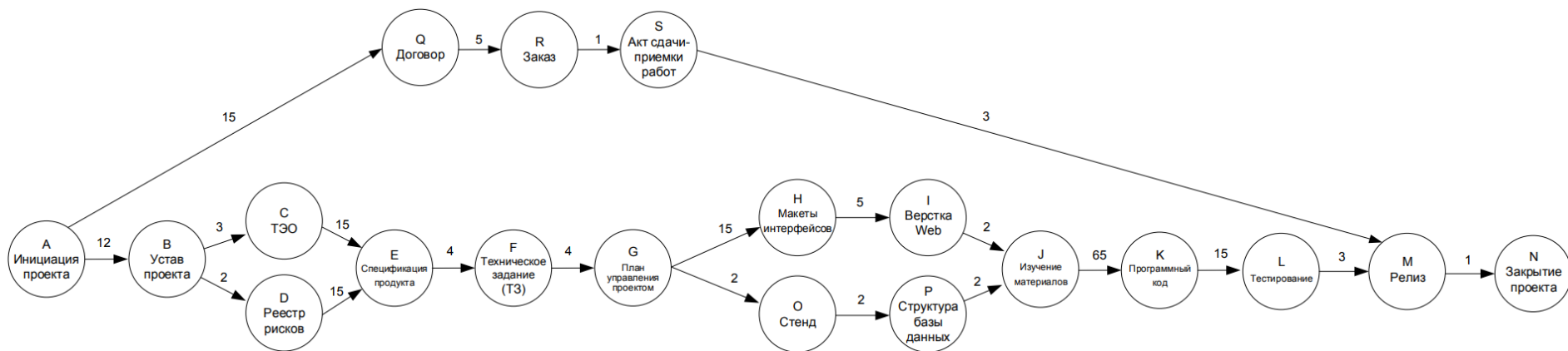


Пример сетевого графика



Поскольку работы изображаются дугами, то можно считать, что каждой дуге сопоставлено число – продолжительность данной работы.

Более сложный пример сетевого графика



Сетевое планирование и управление

- Вопрос: чему равна продолжительность выполнения всего комплекса?

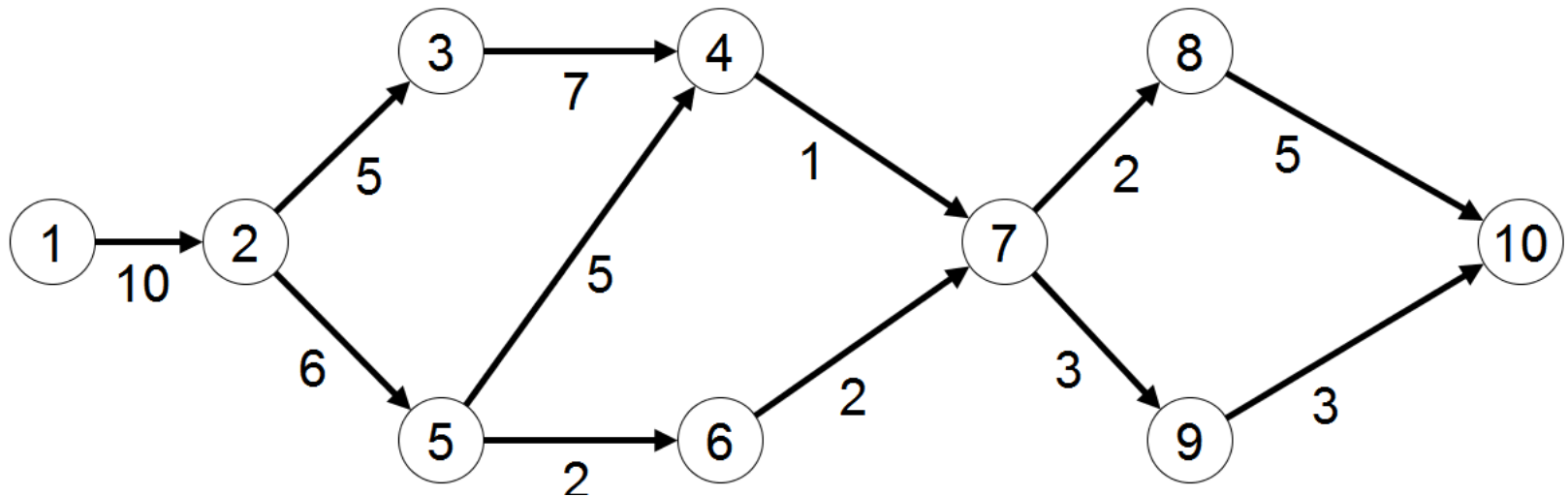
Если рассмотреть любой путь по графу от начальной до конечной вершины, то общее время выполнения не может быть меньше длины этого пути. Это следует из того, что ни одна из работ не может быть начата раньше, чем окончится работа, соответствующая предыдущей дуге.

Задача сетевого графика

- Сетевой график позволяет по заданным значениям длительностей работ найти *критические работы* проекта и его *критический путь*.

Критический путь в графе

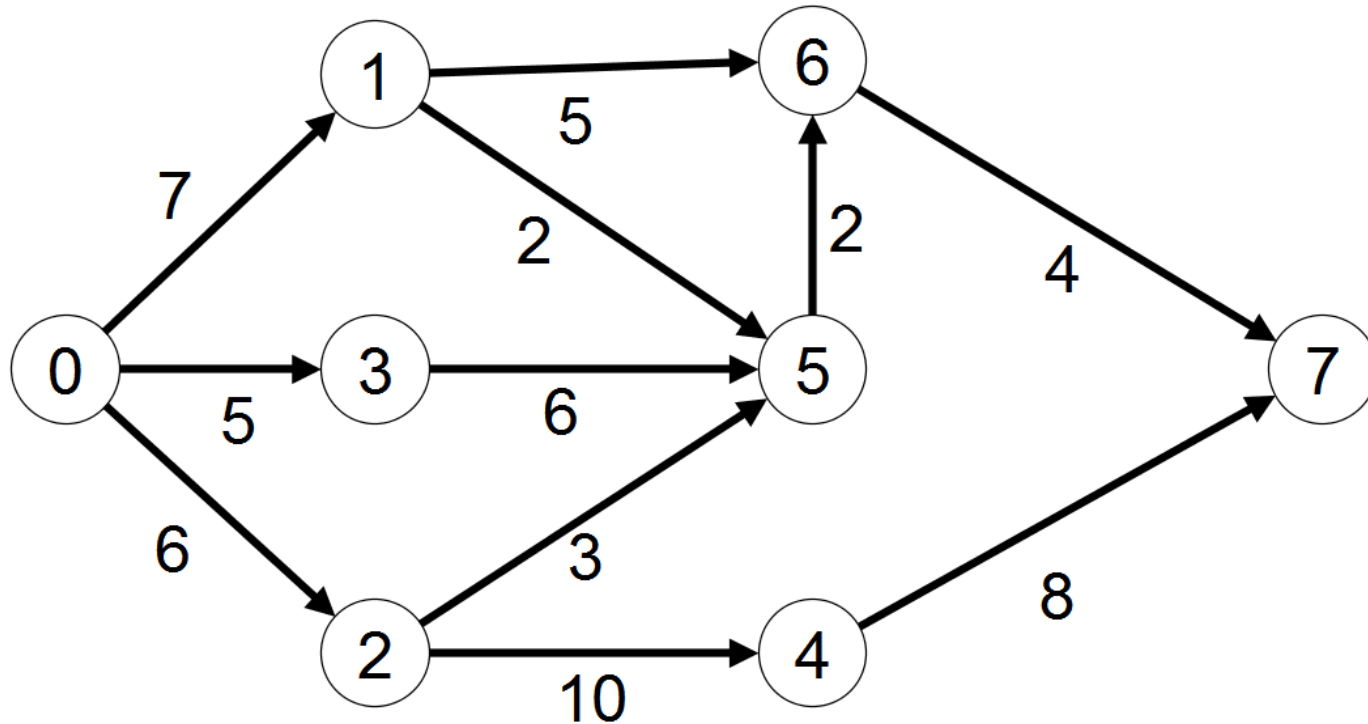
- **Критическим** называется самый длинный путь, ведущий из начальной вершины в конечную.



Критические работы в графе

- **Критической** называется такая работа, для которой задержка ее начала приведет к задержке срока окончания проекта в целом.
- Такие работы не имеют запаса времени. Некритические работы имеют некоторый запас времени, и в пределах этого запаса их начало может быть задержано.

Критический путь/работы в графе



Динамическое программирование

Динамическое программирование (ДП)

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги).

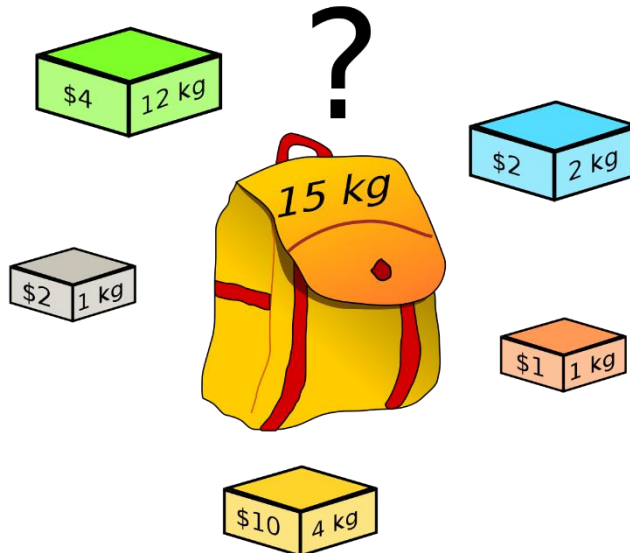
- Задачи ДП являются многоэтапными или многошаговыми.
- Нахождение решения конкретных задач методами ДП включает несколько этапов или шагов, на каждом из которых определяется решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной.

Примеры задач ДП

- Задача о рюкзаке;
- Задача о замене оборудования;

Задача о рюкзаке

- Дано N предметов;
- Предмет i имеет массу $w_i > 0$ и стоимость $p_i > 0$.
- Необходимо выбрать из этих предметов такой набор, чтобы суммарная масса не превосходила заданной величины W , а суммарная стоимость была максимальна.



Другая формулировка

- Небольшая фирма, которая не может выполнять несколько заказов одновременно, составляет план работы на ближайший период W дней.
- Имеется несколько заказов от клиентов.
- Прибыль от i -ого заказа составляет c_i руб., время выполнения - w_i дней.
- Какие именно заказы следует выбрать, чтобы максимизировать прибыль за рассматриваемый период?

Еще одна формулировка

- Риелтор обладает свободной суммой W млн. руб.
- На рынке имеется N единиц жилья, стоящих в настоящий момент $w_1, w_2, \dots, w_n$.
- По достаточно надежным прогнозам, эти же события через год будут стоить на $c_1, c_2, \dots, c_n$ дороже.
- Какие именно единицы жилья должен приобрести риелтор сегодня, чтобы, продав их через год, максимизировать свою прибыль?

Задача о рюкзаке

- Имеется несколько купюр номиналом w_i единиц.
- Некоторые купюры могут совпадать.
- Набрать, используя эти купюры, сумму, не превосходящую заданную величину W , но наиболее близкую к ней.

Способы решения?

Идея решения

Пусть $A(k, s)$ – максимальная стоимость предметов, которые можно уложить в рюкзак вместительности s , если можно использовать только первые k предметов, т.е. $\{1, \dots, k\}$.

Тогда:

- $A(k, 0) = 0$;
- $A(0, s) = 0$.

Идея решения

Найдем $A(k, s)$. Возможны 2 варианта:

- Предмет k не попал в рюкзак.

Тогда $A(k, s) = A(k - 1, s)$;

- Предмет k попал в рюкзак.

Тогда $A(k, s) = A(k - 1, s - w_k) + p_k$;

Следовательно,

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

Стоимость искомого набора равна $A(N, W)$

Пример задачи

- $W=13, N=5$;
- Предмет 1: $w_1 = 3, p_1 = 1$;
- Предмет 2: $w_2 = 4, p_2 = 6$;
- Предмет 3: $w_3 = 5, p_3 = 4$;
- Предмет 4: $w_4 = 8, p_4 = 7$;
- Предмет 5: $w_5 = 9, p_5 = 6$.

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0														
K=1														
K=2														
K=3														
K=4														
K=5														

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0													
K=2	0													
K=3	0													
K=4	0													
K=5	0													

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0												
K=2	0	0												
K=3	0	0												
K=4	0	0												
K=5	0	0												

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0											
K=2	0	0	0											
K=3	0	0	0											
K=4	0	0	0											
K=5	0	0	0											

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1										
K=2	0	0	0											
K=3	0	0	0											
K=4	0	0	0											
K=5	0	0	0											

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1										
K=2	0	0	0	1										
K=3	0	0	0	1										
K=4	0	0	0	1										
K=5	0	0	0	1										

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1									
K=2	0	0	0	1										
K=3	0	0	0	1										
K=4	0	0	0	1										
K=5	0	0	0	1										

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1									
K=2	0	0	0	1	?									
K=3	0	0	0	1										
K=4	0	0	0	1										
K=5	0	0	0	1										

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1									
K=2	0	0	0	1	?									
K=3	0	0	0	1										
K=4	0	0	0	1										
K=5	0	0	0	1										

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1									
K=2	0	0	0	1	6									
K=3	0	0	0	1										
K=4	0	0	0	1										
K=5	0	0	0	1										

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1									
K=2	0	0	0	1	6									
K=3	0	0	0	1	6									
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6									
K=3	0	0	0	1	6									
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6	?								
K=3	0	0	0	1	6									
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6	?								
K=3	0	0	0	1	6									
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6	6								
K=3	0	0	0	1	6									
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6	6								
K=3	0	0	0	1	6	?								
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6	6								
K=3	0	0	0	1	6	?								
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6	6								
K=3	0	0	0	1	6	6								
K=4	0	0	0	1	6									
K=5	0	0	0	1	6									

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1								
K=2	0	0	0	1	6	6								
K=3	0	0	0	1	6	6								
K=4	0	0	0	1	6	6								
K=5	0	0	0	1	6	6								

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1							
K=2	0	0	0	1	6	6	6							
K=3	0	0	0	1	6	6	6							
K=4	0	0	0	1	6	6	6							
K=5	0	0	0	1	6	6	6							

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1						
K=2	0	0	0	1	6	6	6	?						
K=3	0	0	0	1	6	6	6							
K=4	0	0	0	1	6	6	6							
K=5	0	0	0	1	6	6	6							

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1						
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7						
K=3	0	0	0	1	6	6	6							
K=4	0	0	0	1	6	6	6							
K=5	0	0	0	1	6	6	6							

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1						
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7						
K=3	0	0	0	1	6	6	6	?						
K=4	0	0	0	1	6	6	6							
K=5	0	0	0	1	6	6	6							

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1						
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7						
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7						
K=4	0	0	0	1	6	6	6							
K=5	0	0	0	1	6	6	6							

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1						
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7						
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7						
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7						
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7						

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1					
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	?				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	?				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	?				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7					
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	?				
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	?				
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7					

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7	?				

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7	?				

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1				
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7				
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10				

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	11	11
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	13	13
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	13	13

$$A(k, s) = \max(A(k - 1, s), A(k - 1, s - w_k) + p_k)$$

- $W=13, N=5$
- $w_1 = 3, p_1 = 1$
- $w_2 = 4, p_2 = 6$
- $w_3 = 5, p_3 = 4$
- $w_4 = 8, p_4 = 7$
- $w_5 = 9, p_5 = 6$

Решение задачи

	s													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K=1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
K=2	0	0	0	1	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
K=3	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	11	11
K=4	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	13	13
K=5	0	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	13	13

Ответ: предметы {2,4}

Задача о смене оборудования

- Одной из основных проблем индустрии остается проблема замены оборудования. Оно со временем изнашивается и наступает момент, когда большие затраты на новое оборудование компенсируются увеличением производительности и уменьшением производственных затрат.
- Задача: определение оптимальной политики модернизации и замены оборудования, т.е. в определении последовательности замен, максимизирующей суммарную прибыль.



Пример задачи

- Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после этого продается;
- В начале каждого года можно принять решение сохранить оборудование или заменить его новым;
- Стоимость нового оборудования – 4000;
- После t лет эксплуатации оборудование можно продать за $g(t) = 4000 * 2^{-t}$;
- Затраты на содержание в течение года зависят от возраста и равны $r(t) = 600(t + 1)$;
- Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования, чтобы суммарные затраты с учетом начальной покупки и заключительной продажи были минимальны.

Решение задачи

Введем параметры:

- Управление – X^c (сохранить), X^3 (заменить)
- Возраст машины s_k в момент k .

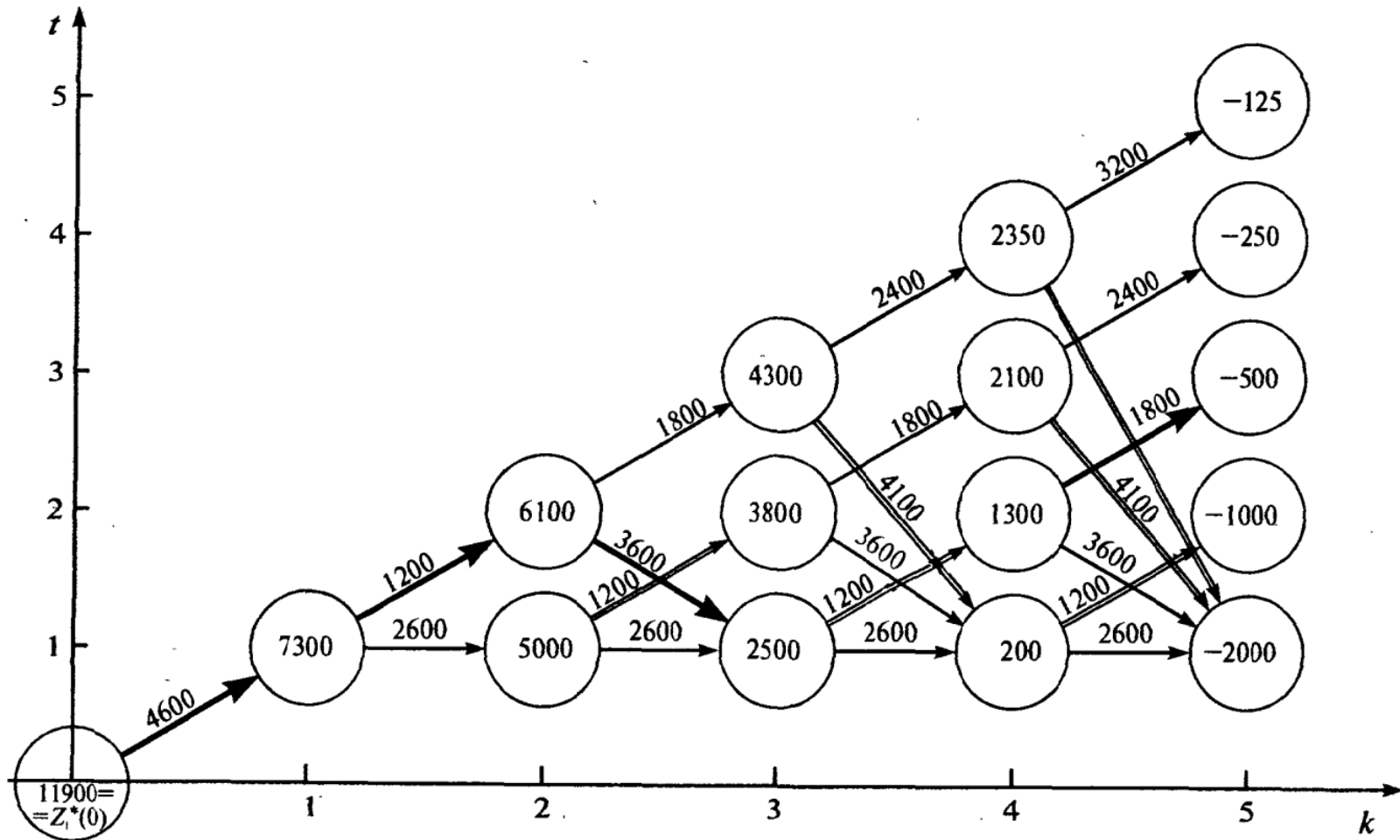
Тогда:

$$s_k = \begin{cases} t + 1, & X_k = X^c \\ 1, & X_k = X^3, k = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Показатель эффективности k -ого шага:

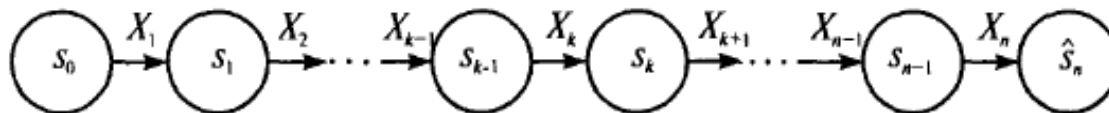
$$f_k(X_k, t) = \begin{cases} 600(t + 1), & X_k = X^c \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t}, & X_k = X^3, k = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Решение задачи



Постановка задачи ДП

- Рассматривается управляемый процесс.
- В результате управления система (объект управления) S переводится из начального состояния s_0 в состояние $\hat{s}$.
- Предположим, что управление можно разбивать на n шагов, т.е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему S из начального состояния в конечное, представляет собой совокупность n шаговых управлений.
- X_k - управление на k -м шаге.



Постановка задачи ДП

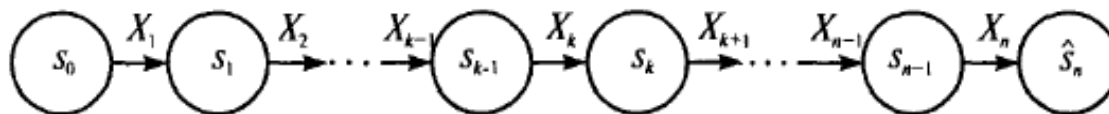
Показатель эффективности рассматриваемой управляемой операции – целевая функция, которая зависит от начального состояния и управления:

$$Z = F(s_0, X)$$

Сделаем несколько предположений:

- состояние системы на шаге k зависит только от предыдущего состояния и управления на данном шаге ($s_k = \varphi(s_{k-1}, X_k)$).
- целевая функция является аддитивной от показателя эффективности каждого шага ($Z = \sum_k f_k(s_{k-1}, X_k)$).

Задача ДП: определить такое допустимое управление $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$, переводящее систему S из начального состояния s_0 в состояние $\hat{s}$, при котором целевая функция Z принимает наибольшее значение.



Особенности ДП

Особенности:

1. Задача оптимизации интерпретируется как n -шаговый процесс управления
2. Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага

$$Z = \sum_k f_k(s_{k-1}, X_k)$$

1. Выбор управления на k -ом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи)
2. Состояние s_k после k -ого шага управления зависит только от предшествующего состояния s_{k-1} и управления X_k (отсутствие последствия), $s_k = \varphi(s_{k-1}, X_k)$
3. На каждом шаге управления X_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние s_k – от конечного числа параметров).

Принцип оптимальности

- «Каково бы ни было состояние s системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный».
- Процесс ДП разворачивается от конца к началу. Сначала делаются различные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них выбирается управление на последнем.
- Затем делаются предположения о том, чем кончился пред предпоследний шаг, и выбирается управление на втором от конца шаге так, что оно в уже выбранном управлении на последующем шаге обеспечивало наилучший эффект эффект на двух последующих шагах и т.д.

Уравнение Беллмана

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}} \{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\}$$

Уравнение Беллмана – рекуррентные соотношения, позволяющие найти предыдущее значение функции, зная последующие.

Спасибо!